ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ.335

Α2. Θεωρία σχολικό σελ.246

Α3. Θεωρία σχολικό σελ.222

Α4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$(z-2)\left(\overline{z-2}\right)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow \left(|z-2|-1\right)\left(|z-2|+2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ (Απορρίπτεται). Άρα $|z-2|=1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνας $\rho=1$.

Ισχύει: $|z|=|z-2+2|\le|z-2|+2=3$

B2.

Επειδή z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ ισχύει:
$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow x_1 + y_1 i = x_2 - y_2 i \Rightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 = -y_2$

Όμως $\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| = 2 \overset{y_1=-y_2}{\Leftrightarrow} |2y_1| = 2 \Leftrightarrow y_1 = \pm 1$

Όμως $|z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-2)^2 + y_1^2} = 1 \Leftrightarrow (x_1-2)^2 + y_1^2 = 1 \overset{y_1=\pm 1}{\Leftrightarrow} (x_1-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

Άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$

$z_1 . z_2 = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow 5 = \gamma$

B3. Έστω $|\nu| \ge 4$. Έχουμε $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - a_1\nu - \alpha_0$. Άρα $|\nu|^3 = \left|-\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right|$. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι

$|\nu|^3 = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \le \left|\alpha_2\nu^2\right| + |\alpha_1\nu| + |\alpha_0| = |\alpha_2||\nu_2| + |\alpha_1|.|\nu| + |\alpha_0|$

Από B1 είναι $|\alpha_0| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$, $|\alpha_2| \le 3$, άρα $\left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 = 3\left(|\nu|^2 + |\nu + 1|\right)$. Η τελευταία γράφεται

$|\nu|^3 \le 3\frac{|\nu|^3 - 1}{|\nu| - 1}$ (είναι $|\nu| - 1 > 0$ εφόσον $|\nu| \ge 4$) $\Leftrightarrow |\nu|^3\left(|\nu| - 1\right) \le 3\left(|\nu|^3 - 1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\nu|^4 \le 4|\nu|^3 - 3$. Όμως $4|\nu|^3 - 3 < 4|\nu|^3$. Άρα $|\nu|^4 \le 4|\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu| < 4$ που είναι άτοπο. Άρα $|\nu| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$2\left(f(x) + x\right).\left(f'(x) + 1\right) = 2x \Leftrightarrow \left((f(x)+x)^2\right)' = (x^2)'$ για κάθε $x \in R$. Από συνέπειες Θ.Μ.Τ ισχύει $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c$. Για $x = 0$ τότε $f(0) = c \Leftrightarrow$ $c = 1$. Άρα $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1$ (1)

Θεωρώ $h(x)=f(x)+x$ η οποία είναι συνεχής στο IR ως άθροισμα συνεχών. Άρα $h^2(x)=x^2+1>0 \Rightarrow h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως, $h(0)=f(0)=1\succ 0 \Rightarrow h(x)\succ 0$. Από τη σχέση (1) ισχύει

$$h^2(x)=x^2+1 \overset{h(x)>0}{\Rightarrow} h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

Γ2. Θα αποδείξω ότι: $f(x)>0 \quad \forall x\in IR$

- Αν $x\leq 0$, προφανώς $f(x)>0$
- Αν $x>0$, $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει. Άρα $f(x)>0 \quad \forall x\in IR$

Για το πεδίο ορισμού της fog ισχύει:

$$A_{fog}=\left\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in IR \,/\, g(x)\in IR\right\}=IR\,.$$

Έχουμε:

$$f^{'}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε και 1-1. Ισχύει:

$$f\left(g(x)\right)=1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0) \overset{f_{1-1}}{\Leftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow g^{'}(x)=3x^2+3x=0 \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$. Το πρόσημο της g’ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$$g\left((-\infty,-1]\right) \overset{g\nearrow}{=} (\lim_{x\to-\infty} g(x),\ g(-1)] = (-\infty,-\frac{1}{2}]$$. Άρα η g(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο $\left(-\infty,1\right]$.

$$g\left((-1,0)\right) \overset{g\searrow}{=} (\lim_{x\to 0^-} g(x),\ \lim_{x\to -1^+} g(x)) = (-1,-\frac{1}{2})$$. Άρα g(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο $\left(-1,0\right)$

$$g\left([0,+\infty)\right) \overset{g\nearrow}{=} [g(0),\lim_{x\to+\infty} g(x)) = [-1,+\infty).$$ Επειδή η τιμή $0 \in g\left([0,+\infty)\right)$ η $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0,+\infty)$ καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x$.

Η f είναι συνεχής στο R και $0, x-\frac{\pi}{4} \in R$. Άρα η συνάρτηση $\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Η συνάρτηση $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών άρα φ(x) είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι

- συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- $\varphi(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$ διότι $f(t) > 0$

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) = -1 < 0$ διότι $f(t) > 0$

Άρα $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Επομένως από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \ell_1 - \ell_2 = 6f'(1) \quad [\text{σχέση (1)}]$$

για το ℓ_1 θέτω u=5h. Αν $h \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$

$$\ell_1 = \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{\frac{u}{5}} = 5 \cdot f'(1)$$

για το ℓ_2 θέτω t=-h. Αν $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

$$\ell_2 = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{-t} = -\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t} = -f'(1)$$

Άρα $f'(1) = 0$.

για κάθε $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για κάθε $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
f′		-	+
f		↘	↗
		min=f(1)	

Δ2.

Η συνάρτηση $h(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η f(t) είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη) στο $(1,+\infty)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη
με:

$$g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}>0$$ επειδή για κάθε $x>1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=1\Rightarrow f(x)-1>0$ και $x-1>0$. Άρα $g\uparrow$

Έστω $h(x)=\int_{x+5}^{x+6}g(u)du=-\int_{\alpha}^{x+5}g(u)du+\int_{\alpha}^{x+6}g(u)du$ με $x>1$

η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων γιατί η g(u) συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$, $x+6, x+5\in(1,+\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+5}g(u)du, \int_{\alpha}^{x+6}g(u)du$ είναι παραγωγίσιμες.

$h'(x)=g(x+6)(x+6)'-g(x+5)(x+5)'=g(x+6)-g(x+5)>0$ γιατί

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και $x+6>x+5$ άρα $g(x+6)>g(x+5)$. Οπότε η h

είναι γνησίως αύξουσα.
Ισχύει:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du\Leftrightarrow h(8x^2)>h(2x^4)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}8x^2>2x^4\Leftrightarrow 4x^2>x^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow x^2(x^2-4)<0\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}x^2-4<0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$$

Όμως $x>1$. Άρα $1<x<2$.

Δ3. Ισχύει $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt,\ x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$

η g είναι παραγωγίσιμη από Δ2 ερώτημα με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

η g΄ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}\quad (1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$, $x>1$.
η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,x]\subseteq(0,+\infty)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ (2) για το ξ ισχύει $1<\xi<x$ και η f΄ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα

$$f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1)-(f(x)-1) > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g''(x) > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο με $x_0=\alpha$ είναι
ε: $y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha)$

όμως $g(\alpha)=\int_\alpha^\alpha \frac{f(t)-1}{t-1}dt=0$ και $g'(\alpha)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$

Άρα ε: $y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$

όμως η g είναι κυρτή οπότε ισχύει:

$g(x)\geq\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$ για κάθε x>1 και η ισότητα ισχύει μόνο για x=α. Άρα η εξίσωση $g(x)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση τη x=α.

Όμως $\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$

$$(a-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(a)-1)(x-a)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.