

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'**  
**16 ΜΑΪΟΥ 2011**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$ .

**β)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon f x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ .

**ε)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

**B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$ .

**Μονάδες 4**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$ .

**Μονάδες 8**

**B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

**i)**  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

**ii)** 
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

**iii)** 
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$ .

**Μονάδες 7**