ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Σελ. 253

Α2. Ορισμός Σελ 191

Α3. Ορισμός Σελ 258

Α4.
α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow |z|^2-z-\bar{z}+1+|z|^2+z+\bar{z}+1=4 \Leftrightarrow$$

$2|z|=2 \Leftrightarrow |z|=1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β2.
Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στο κύκλο επομένως $|z_1|=|z_2|=1$.
Υψώνουμε την δοσμένη σχέση στο τετράγωνο οπότε
$$|z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2 \Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+|z_2|^2=2 \Leftrightarrow$$
$$1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+1=2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0 \quad (1)$$

Είναι επίσης $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2 \overset{(1)}{=} 1+0+1=2$
Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$ αφού $|z_1+z_2|>0$.

Β3.

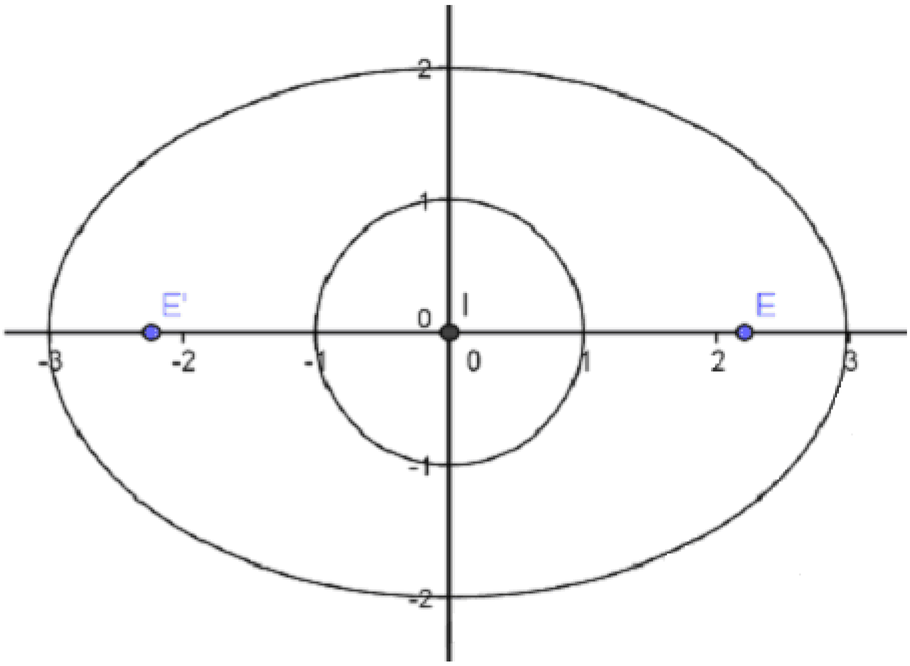
Θέτουμε $w=x+yi$.
Επομένως,
$$|w-5\overline{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5x+5yi|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι έλλειψη με $a=3,\ \beta=2,\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2=9-4=5 \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{5}$ και εστίες $E(\sqrt{5},0),\ E'(-\sqrt{5},0)$.

Η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι α=3 ενώ η ελάχιστη είναι α=2. Επομένως είναι και $2\le|w|\le3$.

Β4.



1ος τρόπος

Γεωμετρικά έχουμε,

Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι $\rho+a=1+3=4$ και η ελάχιστη τιμή του είναι $\beta-\rho=2-1=1$.

Άρα $1\le|z-w|\le4$

2ος τρόπος

Είναι $2\le|w|\le3 \Leftrightarrow 2+|z|\le|w|+|z|\le3+|z| \Leftrightarrow 3\le|w|+|z|\le4 \quad (1)$.

Επίσης είναι $2\le|w|\le3 \Leftrightarrow -3\le-|w|\le-2 \Leftrightarrow |z|-3\le|z|-|w|\le|z|-2 \Leftrightarrow$

$-2\le|z|-|w|\le-1$ και άρα $|z|-|w|<0 \quad (2)$.

Τέλος είναι και $2\le|w|\le3 \Leftrightarrow 2-|z|\le|w|-|z|\le3-|z| \Leftrightarrow 1\le|w|-|z|\le3 \quad (3)$

Από τριγωνική ανισότητα και τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε,

$$\left||z|-|w|\right| \le |z-w| \le |z|+|w| \overset{(2)}{\Leftrightarrow} |w|-|z| \le |z-w| \le |z|+|w| \overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow} 1 \le |z-w| \le 4 .$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$. Προφανής ρίζα η $x=1$ αφού $f(1)=0$. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ και επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Το πρόσημο της συνάρτησης f' είναι για $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)$ άρα $f'(x)>0$, ενώ για $x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)$ είναι $f'(x)<0$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\downarrow$		$\uparrow$	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=1$ το $f(1)=-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\ln x-1=+\infty-1=+\infty$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)\ln x-1=(+\infty)(+\infty)-1=+\infty$

Επομένως είναι $f(\Delta_1)\overset{f\downarrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[-1,+\infty)$ και $f(\Delta_2)\overset{f\uparrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty^+} f(x)\right)=[-1,+\infty)$,

άρα το σύνολο τιμών είναι $f(A)=[-1,+\infty)$.

Γ2.

Η εξίσωση γίνεται,

$x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow f(x)+1=2013 \Leftrightarrow f(x)=2012$
Αφού το $2012\in f(\Delta_1)$ και η συνάρτηση f γνησία μονότονη στο Δ_1 τότε η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1. Ομοίως η εξίσωση

$f(x)=2012$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2. Άρα η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)e^x-2012\,e^x,\quad x>0$.

Η h συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
Η h παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x-2012\,e^x$.

Είναι και
$h(x_1)=f(x_1)e^{x_1}-2012\,e^{x_1}=2012\,e^{x_1}-2012\,e^{x_1}=0$ και
$h(x_2)=f(x_2)e^{x_2}-2012\,e^{x_2}=2012\,e^{x_2}-2012\,e^{x_2}=0$

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$, έτσι ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}=2012\,e^{x_0}\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4.

Είναι $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x,\quad x>0$

Λύνουμε την εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ ή $\ln x=0$ άρα $x=1$ ή $x=1$. Οπότε $x=1$.

Για κάθε $x>1$ είναι $\ln x>0$ οπότε $g(x)=(x-1)\ln x\geq 0$ στο $[1,e]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι,

$$E(\Omega)=\int_1^e|g(x)|dx=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e(x-1)\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x\,dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\ldots\ldots=\frac{e^2-3}{4}\quad \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη. Επομένως η $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα η $h(x^2-x+1)$ είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων με $h'(x^2-x+1)=f(x^2-x+1)(2x-1)$.

Είναι $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x>0$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$. Το 1 εσωτερικό σημείο του $A_g=(0,+\infty)$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$. Επομένως από θεώρημα Fermat είναι $g'(1)=0\Rightarrow f(1)-\frac{1}{e}=0\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, τότε η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση s με τύπο $s(x)=\ln x-x$, $x>0$. Η συνάρτηση s είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $s'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
s'	+	0	-
s	↑		↓

Η συνάρτηση s παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 1 ίσο με $s(1)=-1$. Άρα $s(x)\leq s(1)\Rightarrow \ln x-x\leq -1<0$. Επομένως $\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)<0$, άρα $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\neq 0$, επομένως $f(x)=\frac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}$. Άρα αφού το δεύτερο μέρος είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Άρα $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt$, παραγωγίσιμη με $G'(x) = \dfrac{\ln x - x}{f(x)}$. Οπότε,

$$G'(x) = G(x) + e \Leftrightarrow (G(x)+e)' = G(x)+e \Leftrightarrow e^{-x}(G(x)+e)' + \left(e^{-x}\right)' G(x) + e = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(\dfrac{G(x)+e}{e^x}\right)' = 0$ για κάθε $x>0$ και επομένως $\dfrac{G(x)+e}{e^x} = c \Leftrightarrow G(x)+e = ce^x$. Για $x>1$ είναι $G(1)=0$ επομένως $c=1$ και άρα $G(x)+e=e^x \Leftrightarrow G(x)=e^x-e$ με $G'(x)=e^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x$. Συνεπώς ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ \ x>0$.

Δ2.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$. Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)} = t$. Για $x\to 0^+$ τότε $t\to 0^-$. Άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu t}{t^2} - \frac{1}{t}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu t - t}{t^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu t - 1}{t} = 0.$$

Δ3.

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής και επομένως ολοκληρώσιμη με $F'(x) = f(x)$.

Άρα $F''(x) = f'(x) = \left[e^{-x}(\ln x - x)\right]' = \dfrac{-\left(\ln x - x + 1 - \dfrac{1}{x}\right)}{e^x} > 0$ αφού $\ln x - x + 1 \le 0$ από υπόθεση και $-\dfrac{1}{x} < 0$ για κάθε $x>0$. Επομένως $F''(x) > 0$ για κάθε $x>0$, και άρα η συνάρτηση F είναι κυρτή και άρα η F' γνησίως αύξουσα.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[x,2x]$ και στο $[2x,3x]$, Άρα εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1 \in (x,2x)$ και $\xi_2 \in (2x,3x)$ με $F'(\xi_1) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$ και

$F'(\xi_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{x}$. Είναι $\xi_1<\xi_2$ και επειδή η συνάρτηση F' γνησίως αύξουσα είναι και

$$F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\overset{x>0}{\Rightarrow}F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Rightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x)$$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση
$\phi(x)=2F(2x)-F(\beta)-F(3\beta)$ στο $[\beta,2\beta]$.

Η ϕ συνεχής στο $[\beta,2\beta]$ ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\phi(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$ και $\phi(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)$

Είναι $F'(x)=f(x)<0$ άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως για $\beta<3\beta\Rightarrow F(\beta)>F(2\beta)$ και άρα $\phi(\beta)>0$. Επίσης $\phi(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$ από το Δ3.

Άρα $\phi(\beta)\cdot\phi(2\beta)<0$ και επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\beta,2\beta)$ με $\phi(\xi)=0$. Όμως $\phi'(x)=f(x)<0$, άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και επομένως το ξ είναι μοναδικό.